CAPITOLO 4

Gradiente, divergenza e rotore

L'OPERATORE DIFFERENZIALE VETTORIALE, indicato con ∇, è definito da

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Questo operatore vettoriale possiede proprietà analoghe a quelle dei vettori comuni. Esso è utile nel definire tre grandezze che si impiegano in applicazioni pratiche e sono note come il *gradiente*, la *divergenza* e il *rotore*. L'operatore ∇ è noto anche come *nabla*.

IL GRADIENTE. Sia $\phi\,(x, y, z)$ definita e derivabile in ogni punto (x, y, z) di una certa regione dello spazio (ossia ϕ definisce un campo scalare derivabile). Allora il *gradiente* di ϕ, indicato con $\nabla\phi$ o grad ϕ, è definito da

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

Si noti che $\nabla\phi$ definisce un campo vettoriale.

La componente di $\nabla\phi$ nella direzione del versore $\mathbf{a}$ è data da $\nabla\phi\cdot\mathbf{a}$ ed è detta *derivata direzionale* di ϕ nella direzione di $\mathbf{a}$. In termini fisici, questo è il saggio di variazione di ϕ in (x, y, z) nella direzione di $\mathbf{a}$.

LA DIVERGENZA. Sia $\mathbf{V}(x,y,z) = V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}$ definito e derivabile in ogni punto (x, y, z) di una certa regione dello spazio (ossia $\mathbf{V}$ definisce un campo vettoriale derivabile). Allora la divergenza di $\mathbf{V}$, indicata con $\nabla\cdot\mathbf{V}$ o div $\mathbf{V}$, è definita da

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

Si noti l'analogia con $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$. Si noti anche che $\nabla\cdot\mathbf{V} \neq \mathbf{V}\cdot\nabla$.

IL ROTORE. Se $\mathbf{V}\,(x, y, z)$ è un campo vettoriale derivabile, allora il *rotore* o *rotazione* di $\mathbf{V}$, indicato con $\nabla\times\mathbf{V}$, o rot $\mathbf{V}$, è definito da

$$\nabla\times\mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\times(V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Si noti che nello sviluppo del determinante gli operatori $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ debbono *precedere* V_1, V_2, V_3.

FORMULE COMPRENDENTI ∇. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono funzioni vettoriali derivabili, e ϕ e ψ sono funzioni scalari di posizione (x, y, z) derivabili, allora

1. $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$ o $\text{grad}\,(\phi + \psi) = \text{grad}\,\phi + \text{grad}\,\psi$

2. $\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$ o $\text{div}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \text{div}\,\mathbf{A} + \text{div}\,\mathbf{B}$

3. $\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$ o $\text{rot}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \text{rot}\,\mathbf{A} + \text{rot}\,\mathbf{B}$

4. $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{A})$

5. $\nabla\times(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\times\mathbf{A} + \phi(\nabla\times\mathbf{A})$

6. $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

7. $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})$

8. $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$

9. $\nabla\cdot(\nabla\phi) \equiv \nabla^2\phi \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

dove $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ è detto *operatore di Laplace.*

10. $\nabla\times(\nabla\phi) = \mathbf{0}$. Il rotore del gradiente di ϕ è nullo.

11. $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$. La divergenza del rotore di $\mathbf{A}$ è nulla.

12. $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

Nelle formule *9-12* si suppone che ϕ e $\mathbf{A}$ abbiano derivate parziali seconde continue.

RELAZIONE TRA INTEGRALI DI SUPERFICIE E INTEGRALI DOPPI

Se $\mathcal{R}$ è la proiezione di S sul piano xy, allora [v. fig. 22-8]

22.58 $$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{\mathcal{R}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{N}\,\frac{dx\,dy}{|\mathbf{N}\cdot\mathbf{k}|}$$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Sia S una superficie chiusa che delimita una regione di volume V; se $\mathbf{N}$ è il versore normale (diretto verso l'esterno) e se $d\mathbf{S} = \mathbf{N}\,dS$, si ha [v. fig. 22-9]

22.59 $$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = \int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

Il risultato è anche noto come *teorema di Gauss* o *teorema di Green.*

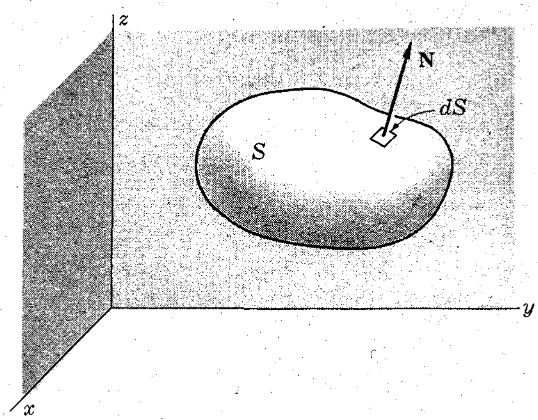

Fig. 22-9

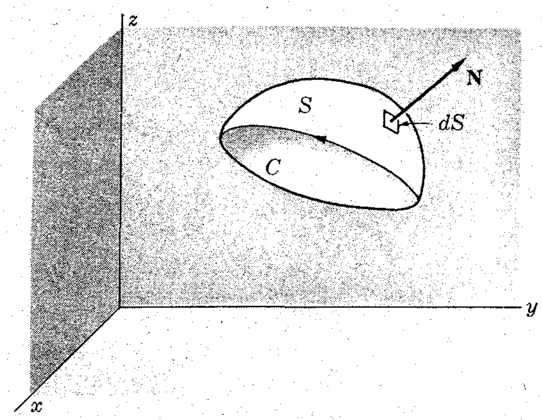

Fig. 22-10

TEOREMA DI STOKES

Sia S una porzione di superficie aperta a due facce limitata da una curva chiusa non intrecciata C [curva chiusa semplice] come in fig. 22-10. Allora

22.60 $$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$

dove il circoletto sull'integrale serve a ricordare che C è chiusa.

TEOREMA DI GREEN NEL PIANO

22.61 $$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

dove R è l'area limitata dalla curva chiusa C. Questo risultato è un caso speciale del teorema della divergenza oppure del teorema di Stokes.